SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

J.E. LEWIS

IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI PER SISTEMI IPERBOLICI FUCHSIANI

19 MARZO 1987

Dopo lo studio degli operatori Fuchsiani iperbolici fatto da Hidetoshi Tahara [T], Bove-Lewis-Parenti [BLP1-2], e altri, vorremmo considerare la soluzione numerica mediante elementi finiti di un sistema iperbolico Fuchsiano:

$$(\dagger) \qquad Lu(t,x) = t\partial_t u + tA(t,x,\partial_x)u + B(t,x)u = f(t,x)$$

ove supponiamo che

(i) L'operatore $\partial_t + A(t,x,\partial_x)$ sia un sistema NxN di operatori differenziali, simmetrico e strettamente iperbolico; valga la disuguaglianza

$$|Re(Au,u)| \leq a_0 \; |u|^2,$$

$$u \in C_0^\infty(R_x^n). \; [(u,v) \equiv \int_{R_x^n} \sum_1^N u_i \bar{v}_i dx; |u|^2 = (u,u)].$$

(ii) $B(t,x)$ sia una matrice di funzioni che soddisfi

$$Re(Bu,u) \geq b_0|u|^2, \; b_0 > 0.$$

Sia $f \in C_0^\infty \; (R_t x R_x^n)$, ci sono soluzioni singolari di $(\dagger)$, ma c'è una soluzione sola che sta in $C^\infty([0,T]; \mathscr{D}'(R_x^n))$; inoltre il dominio di dipendenza della soluzione liscia di $(\dagger)$ è il solito "cono di luce". Se f ha una singolarità C^∞, l'insieme WF(u) è contenuto (per $t \neq 0$) nelle strisce bicaratteristiche. Per dettagli, facciamo riferimento a [BLP1] e [T].

Presento, seguendo Tahara, qualche stima dell'energia per $(\dagger)$, e poi presento due metodi di approssimazioni numeriche delle soluzioni di $(\dagger)$.

La strada da seguire è la seguente:

(1) Porre (†) in una forma debole e fare stime di energia;

(2) Introdurre la forma debole su uno spazio di elementi finiti nello spazio e cercare di fare il confronto dell'errore con l'errore di una certa proiezione della soluzione;

(3) Fare una discretizzazione anche nel tempo e dare una approssimazione "pienamente discreta" della soluzione.

In un recente lavoro, Anatoly Genis [G] ha portato avanti questo programma per l'operatore di tipo Euler-Poisson-Darboux:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_p(t,x) = t\partial_t^2 u + (2p+1)\partial_t u - t(\Sigma\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u) - c(x)u) = 0 \\ u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Genis ha ottenuto risultati anche di stime in L^∞, superconvergenza, ecc. Il nostro studio è ispirato a Genis. I metodi adottati qui sono modificazioni dei metodi di Todd Du Pont [Du2] e Lars Wahlbin [W]. Essi (nel caso non Fuchsiano) hanno risultati anche per equazioni quasilineari.

STIME DI ENERGIA PER IL PROBLEMA CONTINUO

Ci interessano risultati locali nello spazio; per semplicità lavoriamo nel caso periodico su T_x^n. Per $u = (u_1,\dots,u_n)$, $v = (v_1,\dots,v_n)$ denotiamo con (u,v) il prodotto scalare in

$$L^2(T_x^n):\ (u,v) = \sum_1^N \int_{T_x^n} u_j \bar{v}_j dx.$$

Per $r=0,1,2,\dots$, $\quad |u|_r^2 = \sum_{|\alpha|=r} \int_{T_x^n} |\partial_x^\alpha u|^2 dx;$

$$|u| = |u|_0 \ ; \ \|u\|_r^2 = \sum_0^r |u|_k^2 \ ; \ |u|_\infty = \sup |u(x)|.$$

Su T_x^n consideriamo il problema

$$(\dagger) \qquad Lu = t\partial_t u + tA(t,x,\partial_x)u + Bu = f(t,x)$$

con L che soddisfa (i) e (ii).

Poniamo (†) nella forma debole:

$$(\dagger)_d \qquad (t\partial_t u + tAu + Bu,\ v) = (f,v),$$

v, per esempio, in $C^1([0,T];H^1(T_x^n))$.

Con $v = u(t)$:

$$\frac{1}{2}t \frac{d}{dt}|u(t)|^2 - a_0 t|u(t)|^2 + b_0|u(t)|^2 \leq |f(t)|\ |u(t)|.$$

Dalla disuguaglianza $ab \leq \delta\, a^2 + \frac{1}{4\delta}\, b^2$, risulta

$$\frac{1}{2}\ t \frac{d}{dt}|u(t)|^2 + (b_0-a_0t-\delta)|u(t)|^2 \leq \frac{1}{4\delta}\ |f(t)|^2.$$

Fissiamo T piccolo tale che $\frac{1}{2}\,\bar{b} = b_0 - a_0T-\delta>0$.

Per ogni $t \leq T$,

$$t^{-\bar{b}}\ t \frac{d}{dt}(t^{\bar{b}}|u(t)|^2) \leq \frac{1}{2\delta}\ |f(t)|^2$$

Segue

$$t^{\bar{b}}|u(t)|^2 \Big|_{t=\varepsilon}^{t=t} \leq C\int_\varepsilon^t s^{\bar{b}-1}|f(s)|^2 ds.$$

Sotto l'ipotesi $\lim_{t\to 0^+} t^{\bar{b}}|u(t)|^2=0$ (che taglia fuori la "soluzione singolare"),

$$|u(t)|^2 \leq C \int_0^t (\frac{t}{s})^{-\bar{b}} |f(s)|^2 \frac{ds}{s} .$$

Questa maggiorazione, sfruttando la disuguaglianza di Hardy, dà varie stime con peso t^β in $L^p(dt)$. In particolare sfruttiamo solo l'ipotesi $\bar{b}>0$ per ottenere

$$(*) \qquad \sup_{0\leq t\leq T} |u(t)|^2 \leq C \sup_{0\leq t\leq T} |f(t)|^2.$$

La dimostrazione esposta dà (*) per T piccolo ($\leq T_1$), ma per $T_1 \leq T \leq \tilde{T}$, tale stima risulta dalle solite sitme per sistemi iperbolici.

Passiamo alle stime per $|u(t)|_r$. Prendiamo ∂_{x_i} dell'equazione (†). Risulta

$$t\partial_t u_{x_i} + tA(t,x,\partial_x)u_{x_i} + tA_{x_i}(t,x,\partial_x)u + Bu_{x_i} + B_{x_i}u = f_{x_i} .$$

Sia $V = (\nabla u) = (\partial u_{x_i},\dots,\partial_{x_n}u)$, V soddisfa il "gran sistema":

$$t\partial_t V + t\tilde{A}(t,x,\partial_x)V + \tilde{B}V + t\tilde{C}V = \nabla f + \tilde{D}u,$$

$$\text{dove } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & \\ 0 & A & \\ & & A \end{pmatrix} , \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 & \\ 0 & B & \\ & & B \end{pmatrix}$$

e $\tilde{C}$ e $\tilde{D}$ sono matrici $(N^2 \times N^2)$ di funzioni.

Anche se ovviamente $\partial_t+\tilde{A}$ non è strettamente iperbolico, si può fare la stima dell'energia di cui sopra; $\tilde{D}u$ è già controllato e

$$Re((\tilde{B} + t\tilde{C})V,V) \geq (b_0-c_0t)|V|^2.$$

Otteniamo

$$(*)_r \ : \sup|u(t)|_r^2 \leq C \sup_{0\leq t\leq T} \|f(t)\|_r^2$$

La stima $(*)_r$ serve quando facciamo un'approssimazione della soluzione nello spazio.

Per controllare $\partial_t u(t)$, facciamo una derivata rispetto t dell'equazione (†). Risulta

$$(t\partial_t + tA)u_t + (B+I)u_t + \{tA_t u + Au + B_t u\} = f_t.$$

Cioè: Sia $w = \partial_t u$

$$[t\partial_t + tA + (B+I)]w = f_t - \{tA_t u + Au + B_t u\}.$$

Il ragionamento già fatto dà la stima

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\partial_t u\|_r \leq C \sup\{\|f_t\|_r + \|u\|_{r+1}\} \leq C \sup\{\|f_t\|_r + \|f\|_{r+1}\}.$$

Riassumiamo le stime dell'energia ottenuta nel seguente

<u>Teorema 1.</u> $\sup\|\partial_t^k u\|_r \leq C \sup\{\|\partial_t^k f\|_r + \|\partial_t^{k-1} f\|_{r+1} + \ldots + \|f\|_{r+k}\}.$

SPAZI DI ELEMENTI FINITI

Per una descrizione degli spazi di elementi finiti si veda Fairweather [F] e Strang e Fix [SF].

Sia $\Omega = T_x^n$ (o più generalmente un aperto di R^n); si considera un sottospazio S^h di $L^2(\Omega)$ di dimensione finita. Diciamo che S^h è di classe M_k^h, $0\leq k\leq r$ se e solo se

I. $S^h \subset H^{k+1}(\Omega)$ e

II. Per $2\leq s\leq r$, per ogni $u \in H^s(\Omega)$,

$$\inf_{\chi \in S_h} (|u-\chi|+h|u-\chi|_1) \leq C_s h^s |u|_s.$$

Di solito tale spazio S^h nasce da una sottodivisione di Ω in triangoli o quadrilateri T_j^h, $j=1,\dots,N_h$. Si suppone che ogni "elemento" T_j^h ha diametro $\approx h$ ed è regolare (cioè non troppo stretto, ecc.). Ogni $\chi \in S^h$, ristretto ad un elemento T_j^h, è un polinomio di grado $\leq r-1$ (o almeno un prodotto tensoriale di tali polinomi).

La condizione $S^h \subset H^{k+1}(\Omega)$ impone condizione di compatibilità sulle derivate di ordine $\leq k$ lungo i bordi di due elementi con una faccia a vertice in comune. Nel caso $n=1$, la sottodivisione è semplicemente una partizione dell'intervallo e $\chi \in H^{k+1}$ se e solo se $\chi \in C^k$.

Per dettagli e esempi si veda la bibliografia. Citiamo esempi importanti:

$n=1$: i polinomi cubici di Hermite ($r=4$, $k=1$);

$n=2$: Su un triangolo, l'elemento cubico di Zlamal.

Ad ogni vertice si dà χ, χ_x, χ_y; per trovare una base locale di polinomi cubici (dim = 10), ci rimane un "grado di libertà", di solito si dà χ al baricentro del triangolo. L'elemento di Zlamal è di classe M_0^4.

$n=2$: Su un rettangolo con lati paralleli agli assi si considera un prodotto tensoriale di polinomi cubici di Hermite. Per base locale (di dim = 16) su ogni elemento si dà $\chi, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ ad ogni modo per ottenere un sottospazio di classe M_2^4. Il controllo di χ_{xy} ad ogni modo assicura che le prime derivate normali sono continue attraverso un bordo comune di due elementi: cioè $\chi \in H^2(\Omega)$.

IL METODO DI DU PONT NEL CASO SEMIDISCRETO

Definiamo l'approssimazione semidiscreta di (†) la funzione $U(t) \in C°([0,T];S^h)$ che soddisfa:

$$(\dagger)_h \qquad \begin{cases} \text{Per ogni } V \in S^h, \\ (t\partial_t U + tAU + BU, V) = (f,V). \end{cases}$$

Attualmente la soluzione di $(\dagger)_h$ è la soluzione di un gran sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Notiamo che $U(0)$ è univocamente determinato dalla relazione

$$(B(0,x)U(0),V) = (f,V), \quad V \in S^h.$$

Inoltre

$$b_0|u(0)-U(0)|^2 \leq \text{Re}(B(u(0)-U(0)),\ u(0)-U(0))$$

$$= \text{Re}(B(u(0)-U(0)),\ u(0)-\chi) \quad \text{per ogni} \quad \chi \in S^h,$$

dato che $(B(u(0)-U(0)),V) = (f(0),V)-(f(0),V)=0$.

Risulta che

$$|u(0)-U(0)| \leq Ch^r|u(0)|_r.$$

La stima per $\sup_t|u(t)-U(t)|$ è data dal teorema seguente:

<u>Teorema 2.</u> Supponiamo che S^h è di classe M_0^r e

$$A = \sup_t |u(t)|_r + |tu_t|_r < \infty.$$

con u soluzione di (†) e $U(t) \in S^h$ soluzione di $(\dagger)_h$. Allora

$$|u(t) - U(t)| \leq CA(t+h)h^{1-1}.$$

Prova. Sia $W(t):[0,T] \to S^h$ un'approssimazione di $u(t)$ che soddisfa

$$|u(t)-W(t)| + h|u(t)-W(t)|_1 \leq Ch^r|u(t)|_r$$

$$|u_t(t)-W_t(t)| \leq Ch^r|u_t(t)|_r.$$

Per esempio, sia W la proiezione in H^1 di u: W è l'unica funzione in S^h tale che

$$\beta_1(u-W,V) \equiv (u-W,V) + (\nabla(u-W),\nabla V) = 0, \quad V \in S^h.$$

(Formalmente, W risolve approssimativamente il problema

$$\Delta W - W \approx \Delta u - u.$$

Tale problema è l'esempio fondamentale degli elementi finiti. Dato β non dipendente da t risulta che W_t è la proiezione di u_t).

Scriviamo $u(t)-U(t) = (u(t)-W(t)) + (W(f)-U(t)) \equiv \eta(t) + \zeta(t)$. Per ogni $V \in S^h$,

$$(t\zeta_t+tA\zeta+B\eta,V) = -(t\eta_t+ tA\eta + B\eta,V) \leq CA(h^r+th^{r-1})|V|.$$

Sia $V = \zeta(t) \in S^h$:

$$\frac{1}{2}t \frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + (b_0-a_0t-\delta)|\zeta(t)|^2 \leq \frac{C}{\delta} A^2\{h^{2r} + t^2h^{2r-2}\}.$$

Segue, come nel caso continuo

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\zeta(t)|^2 \leq CA^2\{h^{2r-2}(h^2+T^2)\}.$$

Finalmente $|u(t) - U(t)| \leq |\eta(t)| + |\zeta(t)|$.

Si chiede perché abbiamo preso una potenza di h. DuPont [Du1] ha dimostrato che per l'equazione

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(0) = u_o(x) \end{cases}$$

con i polinomi cubici di Hermite (qui n=1 e S^h di classe M^4), in generale non è possibile aspettarsi convergenza migliore di $O(h^3)$.

DISCRETIZZAZIONE NEL TEMPO

La relazione

$$(\dagger)_h \qquad (t\partial_t U + tAU + BU, V) = (f, V), \quad V \in S^h$$

conduce ad un sistema (singolare!) di grande dimensione, il quale dev'essere risolto mediante un metodo di differenze finite in t.

Sia F(t) una funzione (anche di x), definiamo, con Δt fissato:

$$F_m = F(m\Delta t) \; ; \; F_{m+1/2} = F((m+1/2)\Delta t);$$

$$F^{m+1/2} = \frac{F_m + F_{m+1}}{2} \; ; \; \delta_t F_m = \frac{F_{m+1} - F_m}{\Delta t}$$

Usando la formula di Taylor con resto,

$$u_{m+1/2} = u^{m+1/2} - \frac{(\Delta t)^2}{2!4} \int_{-1}^{1} (1-|\theta|) u_{tt}((m+\tfrac{1}{2})\Delta t + \theta \tfrac{\Delta t}{2})\, d\theta;$$

$$\partial_t u_{m+1/2} = \delta_t u_m - \frac{(\Delta t)^2}{3!4} \int_{-1}^{1} (1-|\theta|^2\, u_{ttt}((m+\tfrac{1}{2})\Delta t + \theta \tfrac{\Delta t}{2}) d\theta;$$

Per brevità scriviamo queste formule come

$$u_{m+1/2} = u^{m+1/2} - (\Delta t)^2 K_1 u_{tt,m+1/2} ;$$

$$\partial_t u_{m+1/2} = \delta_t u_m - (\Delta t)^2 K_2 u_{ttt,m+1/2}.$$

Notiamo che

$$|K_i v_{m+1/2}| \leq C \sup_{[t_m, t_{m+1}]} |V| \; ; \quad i = 1,2,$$

$$|t_{m+1/2} K_i V_{m+1/2}| \leq C \sup_{[t_m, t_{m+1}]} |tv| \; , \quad i=1,2.$$

Quest'ultima osservazione è di Genis.

Definiamo la soluzione approssimante "pienamente discreta" come una successione $\{U_m\}_{m=o}^{\mu} \subset S^h$ che soddisfa

$$(\dagger)_{h,\Delta t} \quad \begin{cases} |u(0) - U(o)| \leq CA\, h^{r-1} \\ \text{Per } m=0,\dots,M-1 \\ \text{Per ogni } V \in S^h, \end{cases}$$

$$((t_{m+1/2}\delta_t U_m + t_{m+1/2}A(t_{m+1/2})\ U^{m+1/2} + B(t_{m+1/2}) + U^{m+1/2}, V) = (f_{m+1/2}, V), \quad V \in S^h.$$

Sia

$$L_{\Delta t}U_m = t_{m+1/2}\delta_t U_m + t_{m+1/2}A(t_{m+1/2})U^{m+1/2} + B(t_{m+1/2})U^{m+1/2},$$

risulta che

$$(Lu)_{m+1/2} = L_{\Delta t}u_m - (\Delta t)^2 g_{m+1/2},$$

$$g_{m+1/2} \equiv t_{m+1/2}K_2 u_{ttt,m+1/2} + t_{m+1/2}A_{m+1/2}K_1 u_{tt,m+1/2}$$

$$+ B_{m+1/2}\ K_1 u_{tt,m+1/2}.$$

Possiamo portare gli operatori $A_{m+1/2}$, $B_{m+1/2}$ sotto gli integrali (in t) che definiscono K_1. Risulta che

$$|g_{m+1/2}| \leq C \sup_{[t_m, t_{m+1}]} \{|tu_{ttt}| + \|tu_{tt}\|_1 + |u_{tt}|\}.$$

Con questi preliminari siamo in grado di enunciare una stima per $u_m - U_m$.

Teorema 3.1. Supponiamo che $U_m \in S^h$ sia già determinata e $\Delta t, \Delta t/h$ siano abbastanza piccoli. Allora la relazione

$$(L_{\Delta t}U_m, V) = (f_{m+1/2}, V) \quad , \quad V \in S^h,$$

determina U_{m+1} univocamente.

2) Supponiamo che

$$A = \sup_t\{|u|_r + |u_t|_1 + |tu_{ttt}|+\|tu_{tt}\|_1+|u_{tt}|\}.$$

Allora

$$|u_m-U_n| \leq CA(1+\log(\frac{t_m}{\Delta t}))\{(h+t)h^{r-1} + (\Delta t)^2\}$$

Prima di dare la dimostrazione, notiamo che la costante A può essere maggiorata del dato f. La discretizzazione nel tempo (almeno con questa dimostrazione) ci fa perdere un $\log(1/\Delta t)$.

<u>Prova</u>. La determinazione di U_{m+1} consiste nella risoluzione del problema

$$\begin{cases} \text{Per ogni } V\in S^h \\ B_{m+1/2}(U_{m+1/2},V)=(t_{m+1/2}U_{m+1}+t_{m+1/2}\frac{\Delta t}{2}A_{m+1/2}U_{m+1} \\ +\frac{\Delta t}{2}B_{m+1/2}U_{m+1},V) = (\rho_m,V) \end{cases}$$

con ρ_m dato.

Per $t_{m+1/2}$ abbastanza piccolo

$$\mathrm{Re}\, B_{m+1/2}(V,V)\geq[t_{m+1/2}(1-\frac{\Delta t}{2}a_o) + b_o\frac{\Delta t}{2}]|V|^2.$$

Se non c'è a priori controllo su b_o per $t_{m+1/2}$ grande, sfruttiamo il fatto che

$$\mathrm{Re}\, B_{m+1/2}(V,V) \geq [t_{m+1/2}(1-\frac{\Delta t}{2}\frac{C}{h}) + b_o\frac{\Delta t}{2}]\ |V|^2.$$

L'esistenza e unicità di U_{m+1} seguono dal Lemma di Lax-Milgram.

Per farci arrivare ad una stima per u_m-U_m, prendiamo di nuovo $W_m\in S^h$ la proiezione in H^1 di u_m. $\delta_t W_m$ è la proiezione di $\delta_t u_m$.

Sia $\eta_m = u_m - \dot{W}_m$,

$$\begin{cases} |\eta_m| + h|\eta_m|_1 \leq C|u_m|_r h^r \leq CAh^r \\ |\delta_t \eta_m| \leq C|\delta_t u_m|_r h^r \leq CA\, h^r. \end{cases}$$

Dalle relazioni

$$(L_{\Delta t} u_m, V) = (f_{m+1/2} - (\Delta t)^2 g_{m+1/2}, V)$$

$$(L_{\Delta t}\, U_m, V) = (f_{m+1/2}, V),$$

sia $u_m - U_m = (u_m - W_m) + (W_m - u_m) \equiv \eta_m + \zeta_m$,

$$(L_{\Delta t} \zeta_m, V) = -(L_{\Delta t} \eta_m + (\Delta t)^2\, g_{m+1/2}, V).$$

Si nota che

$$|L_{\Delta t} \eta_m| \leq C\, t_{m+1/2} A h^r + CAt_{m+1/2} h^{r-1} + Ch^r A;\ |g_{m+1/2}| \leq CA.$$

Mettiamo $V = \zeta^{m+1/2} \in S^h$:

$$(L_{\Delta t} \eta_m, \zeta^{m+1/2}) = t_{m+1/2} \frac{t}{2}\, \delta_t |\zeta_m|^2 + t_{m+1/2}(A_{m+1/2} \zeta^{m+1/2}, \zeta^{m+1/2})$$

$$+ (B_{m+1/2} \zeta^{m+1/2}, \zeta^{m+1/2})$$

$$\leq CA\{t_{m+1/2} h^{r-1} + h^r\}|\zeta^{m+1/2}| + CA(\Delta t)^2 |\zeta^{m+1/2}|$$

Con $\frac{\bar{b}}{2} = b_o - a_o t_\mu - \delta > 0$, risulta

$$t_{m+1/2}\delta_t|\zeta_m|^2 + \bar{b}\,|\zeta^{m+1/2}|^2 \leq CA^2\{(t^2_{m+1/2}+h^2)h^{2r-2}+(\Delta t)^4\}$$

Dividiamo per $t_{m+1/2} = (m + 1/2)\Delta t$ e facciamo $\sum_{0}^{M-1}\ldots\,\Delta t$. Risulta

$$\sum_{m=0}^{M-1} \delta_t|\zeta_m|^2\Delta t + \bar{b}\sum_{m=o}^{M-1} \frac{|\zeta^{m+1/2}|^2\Delta t}{(m+1/2)\Delta t}$$

$$\leq CA^2\{h^{2r-2}\ \{\sum_{0}^{M-1} t_{m+1/2}\Delta t + \sum_{0}^{M-1}\frac{h^2}{(m+1/2)}\} + (\Delta t)^4\sum_{0}^{M-1}\frac{1}{(m+1/2)}\}$$

$$\leq CA^2\{t^2_M\, h^{2r-2} + (1+\log M)(h^{2r} + (\Delta t)^4)\}$$

La dimostrazione è fatta sotto l'ipotesi $a_o t_M < b_o-\delta$, per $t_M \geq \frac{b_o-\delta}{a_o}$, il solito Lemma di Gronwall è applicabile.

UN METODO DI WAHLBIN

Per migliorare la convergenza in h, Wahlbin [W] ha proposto di introdurre una "viscosità artificiale". Da ora in poi supponiamo n=1 e prendiamo S^h lo spazio di polinomi cubici di Hermite su una partizione quasiuniforme di [0,1] (σT^1_x). S^h è di classe M^4_1; in più soddisfa una cosidetta "ipotesi inversa", cioè per $\chi \in S^h$,

$$h|\chi|_{\ell+1} \leq C|\chi|_\ell, \quad \ell = 0,1,2,3.$$

(Segue dall'omogeneità).

Una conseguenza è una buona stima della proiezione in L^2 di una funzione in H^4:

Sia $W \in S^h$ tale che $(u,V) = (W,V)$, $V \in S^h$, allora $\|u-w\|_s \leq Ch^{4-s}|u|_4$,

$s = -1,0,1,2$.

$$(\|u\|_{-1} = \sup_{\phi \in H^1} \frac{|(u,\phi)|}{\|\phi\|_1}).$$

Si veda Douglas-DuPont-Wahbin [DDW].

Per b fra 3 e 4 da scegliersi in un modo opportuno, sia u soddisfacente $Lu = f$, allora

$$(tu_t + tAu + Bu,V) \neq th^b(u_{xx},V_{xx}) = (f,V) + th^b(u_{xx},V_{xx}).$$

Definiamo $U(t) \in C^0([0,T];S^h)$ la soluzione di

$$(+)_{h,b} \qquad (tU_t + tAU + BU,V) + th^b(U_{xx},V_{xx}) = (f,V), \quad V \in S_h.$$

Formalmente stiamo approssimando la soluzione di

$$tu_t + tAu + Bu + th^b u_{xxxx} = f,$$

un problema singolare di tipo parabolico.

<u>Teorema 4.</u> Supponiamo che $b_0 > 0$ e $b = 10/3$. Mettiamo

$$A = \sup_t(|u|_4 + |tu_t|_4)$$

Allora

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)-U(t)| \leq CA(h^4+\sqrt{h^b})$$

Prova. Prendiamo $W(t)$ la proiezione di $u(t)$ su S^h in L^2. Scriviamo

$$u-U = (u-W) + (W-U) \equiv \eta + \zeta$$

Risulta (con $V = \zeta$)

$$(t\zeta_t + tA\zeta + B\zeta,\zeta) + th^b(\zeta_{xx},\zeta_{xx})$$

$$= -(t\eta_t + tA\eta + B\eta,\zeta) - th^b(\eta_{xx},\zeta_{xx}) + th^b(u_{xx},\zeta_{xx}).$$

La parte sinistra è (come al solito) $\geq$

$$\frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + (b_o-a_ot)|\zeta(t)|^2+th^b|\zeta_{xx}|^2.$$

Controlliamo la parte destra:

$$|(t\eta_t,\zeta)| \leq \delta|\zeta|^2 + CA^2h;$$

$$|(B_\eta,\zeta)| \leq \delta|\zeta|^2 + CA^2h;$$

$$|th^b(\eta_{xx},\zeta_{xx})| \leq \delta\ th^b|\zeta_{xx}|^2 + Cth^b\ h^4A^2;$$

$$|th^b(u_{xx},\zeta_{xx})| = |th^b(u_{xxxx},\zeta)| \leq \delta t|\zeta|^2 + Ct\ h^{2b}A^2.$$

Il bello è il controllo di $(tA\eta,\zeta)$.

$$|(tA\eta,\zeta)| \leq Ct\|\eta\|_{-1}\|\zeta\|_2 \leq ct\ \|\eta\|_{-1}(|\zeta|_2 + |\zeta\ |_o)$$

$$\leq Cth^5A(h^{-b/2}h^{b/2}|\zeta|_2 + |\zeta|_o)$$

$$\leq \delta th^b|\zeta|_2^2 + Cth^{10-b}A^2+\delta|\zeta\ |_o^2 + Ct^2h^{10}A^2$$

Risulta

$$\frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\zeta|^2 + \frac{\bar{b}}{2}|\zeta|^2 + (1-3\delta)th^b|\zeta_{xx}|^2$$

$$\leq CA^2\{h^8+th^{4+b}+th^{2b}+th^{10-b}+t^2h^{10}\}$$

Se $b=10/3$, $10-b = 2b$ e

$$\sup|\zeta(t)|^2 \leq CA^2\{h^8 + th^{2b}\}.$$

Nota. Sfruttando una proiezione diversa si può migliorare il risultato fino a $b = 7/2$. Si veda Wahlbin [W].

Adesso seguiamo il metodo di viscosità artificiale di Wahlbin nel caso "pienamente discreto".

Si considera una successione $\{U_m\}_{m=0}^M \subset S^h$, $u_m = u(m\Delta t)$, che soddisfa

$$(\dagger)_{h,b,\Delta t}\quad\begin{cases} |u(0) - U_0| \leq CA\, h^b \\ \text{Per ogni } V\in S^h \\ (L_{\Delta t}U_m, V) + t_{m1/2}h^b(U_{xx}^{m+1/2}, V_{xx}) \\ = (f_{m+1/2}, V). \end{cases}$$

Teorema 5. Per Δt, $\Delta t/h$ abbastanza piccoli la successione $\{U_m\}$ che soddisfa $(\dagger)_{h,b,\Delta t}$ è univocamente determinata da U_0. Sia

$$A = \sup_t\{|u|_4+|tu_t|_4 + \|tu_{tt}\|_1 + |tu_{ttt}|+|u_{tt}|\},$$

allora

$$|u_m - U_m|^2 \leq CA^2\{[1+\log(\frac{t_m}{\Delta t})](h^8+(\Delta t)^4)+h^{2b}\}.$$

Prova. L'esistenza di U_m segue come di sopra dal Lemma di Lax-Milgram.

Sia W_m la proiezione in L^2 di u_m, spezziamo $u_m = (u_m - W_m) + (W_m - u_m) \equiv \eta_m + \zeta_m$. Con $L_{\Delta t}$, $g_{m+1/2}$ definiti come nella dimostrazione di Teorema 3,

$$(L_{\Delta t}\zeta_m, \zeta^{m+1/2}) + t_{m+1/2}\, h^b(\zeta_{xx}^{m+1/2}, \zeta_{xx}^{m+1/2})$$

$$= -(L_{\Delta t}\eta_m, \zeta^{m+1/2}) - t_{m+1/2}\, h^b(\eta_{xx}^{m+1/2}, \zeta_{xx}^{m+1/2})$$

$$+ t_{m+1/2}\, h^b(u_{xx}, \zeta_{xx}^{m+1/2}) + (\Delta t)^2(g_{m+1/2}, \zeta^{m+1/2}).$$

La dimostrazione procede nello spirito delle prove dei Teoremi 3 e 4; il bello è di controllare

$$|t_{m+1/2}(A_{m+1/2}\eta^{m+1/2}, \zeta^{m+1/2})|$$

$$\leq Ct_{m+1/2}\|\eta^{m+1/2}\|_{-1}(|\zeta^{m+1/2}|_2 + |\zeta^{m+1/2}|_o)$$

$$\leq Ct_{m+1/2}h^5 A(|\zeta^{m+1/2}|_2 + |\zeta^{m+1/2}|_o)$$

$$\leq \delta t_{m+1/2}h^b|\zeta_{xx}^{m+1/2}|^2 + Ct_{m+1/2}h^{10-b}A^2$$

$$+ \delta t_{m+1/2}|\zeta^{m+1/2}|_o^2 + Ct_{m+1/2}h^{10}A^2.$$

Inoltre

$t_{m+1/2}h^b(\eta_{xx}^{m+1/2}, \zeta_{xx}^{m+1/2})$ è maggiorato da

$$\delta\ t_{m+1/2}\ h^b|\zeta_{xx}^{m+1/2}| + C\ h^{4+b}\ A^2.$$

Otteniamo

$$t_{m+1/2}\delta_t|\zeta_m|^2 + \bar{b}|\zeta^{m+1/2}|^2 + c t_{m+1/2} h^b |\zeta_{xx}^{m+1/2}|^2$$

$$\leq CA^2\{h^8 + t_{m+1/2}h^{2b} + t_{m+1/2}h^{b+4} + t_{m+1/2}h^{10-b} + (\Delta t)^4\}$$

Con $b = 10/3$

$$|\zeta_M|^2 - |\zeta_o|^2 \leq CA^2\{[1+\log(\frac{t_m}{\Delta t})](h^8+(\Delta t)^4)+h^{2b}\}.$$

BIBLIOGRAFIA

[BLP1]A. BOVE, J.E. LEWIS and C. PARENTI, Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic operators, Hokkaido Math. J. 14 (1985), 175-248.

[BLP2]———————————————, Structure properties of solutions of some Fuchsian hyperbolic equations, Math. Ann. 273 (1986), 553-571.

[DDuW]J. DOUGLAS, T. DuPONT, and L. WAHBIN, Optimal L^∞ error estimates for Galerkin approximations to solutions of two-point boundary value problems, Math. Comp. 29 (1975), 475-483.

[Du1] T. DuPONT, Galerkin methods for first order hyperbolics: an example, SIAM J. Num. Anal. 10 (1973), 890-899.

[Du2] T. DuPONT, Galerkin method for modeling gas piplines, in Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equations, Lecture Notes in Mathematics, 430 (1974), 112-130.

[F] G. FUIRWEATHER, Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (Dekker), 34 (1978).

[G] A.M. GENIS, On finite element methods for the Euler-Poisson-Darboux equation, SIAM J. Num. Anal. 21 (1984), 1080-1106.

[SF] G. STRANG and G.J. FIX, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall (1973).

[T] H. TAHARA, Singular hyperbolic systems
I: J. Fac. Sc. Tokyo 1A, 26 (1979), 213-238.
II: J. Fac. Sc. Tokyo 1A, 26 (1979), 391-412.
III: J. Fac. Sc. Tokyo 1A, 27 (1980), 465-507.
IV: Jap. J. Math. 8 (1982), 297-308.

[W] L. WAHLBIN, A modified Galerkin procedure with Hermite cubics for hyperbolic problems, Math. Comp. 29 (1975), 978-984.